Liapunov Functions and Periodic Solutions of Functional Differential Equations (リアプノフ関数と関数微分方程式の周期解について)

著者	古用 哲夫
号	675
発行年	1981
URL	http://hdl.handle.net/10097/24482

氏名・(本籍)	古用哲夫（ふるもちてつお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第 675 号
学位授与年月日	昭和 56 年 10 月 28 日
学位授与の要件	学位規則第 5 条第 2 項該当
最終学歴	昭和46年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Liapunov Functions and Periodic Solutions of Functional Differential Equations（リアプノフ関数と関数微分方程式の周期解について）
論文審査委員	（主査） 教授 吉沢太郎　教授 加藤順二 教授 小竹　武

論文目次

論 文 内 容 要 旨

自然科学や社会科学の諸分野における，時間遅れの影響を受ける種々の現象を記述するために，関数微分方程式の研究の重要性は，古くから指摘されていた。しかし，関数微分方程式に対する理論は，その必要性と相俟って，最近30年間で飛躍的な進歩を遂げた。その理論の中で，解の一意性と安定性や周期解の存在は，極めて重要な課題である。そして，その研究において用いられる標準的な手段は，常微分方程式に対して有効な方法の適用を試みることである。その際，関数微分方程式に対する相空間が必ずしも局所コンパクトでないことが，主要な障害となる。従って，それらの研究においては，何らかの新しい方法を見出すことが必要である。そのような難しさにも拘らず，現在までに関数微分方程式の研究に多くの努力が払われてきた。更にそれらの研究において，Liapunov 関数（または汎関数）が重要な役割をになっている。

第一章では，関数微分方程式の解の一意性と積分安定性について，Liapunov 汎関数に関する定理が得られている。

Liapunov の方法は，関数微分方程式の研究においても有用である。逆定理は，特に摂動系の解の性質を研究する際に重要である。第一節においては，関数微分方程式の解の一意性について考える。常微分方程式の解の一意性に関しては，多くの結果があるが，岡村や吉沢は，ある種の性質をもった Liapunov 関数の存在が，解の一意性のために必要にして十分であることを示している。この節の結果は，常微分方程式における岡村や吉沢の結果が，関数微分方程式に拡張できることを示すものである。

第二節においては，Liapunov 汎関数の族を用いて，関数微分方程式の解の積分安定性に対する必要十分条件について述べる。Liapunov の方法は，関数微分方程式の定性的理論においても非常に一般的で強力であるが，必要な全ての性質をもった単独の Liapunov 汎関数を構成することは容易でないことが多い。また，Liapunov の方法を用いるとき，単独の Liapunov 関数を，しかるべき他の性質をもった Liapunov 関数の族で置き換えても良いことが容易にわかる。更に，Liapunov関数の族の方が，単独のLiapunov関数よりも構成し易いことがある。主定理は，ある種の関数微分方程式において，零解が積分漸近安定であるためには，ある性質をもった Liapunov 汎関数の族が存在することが必要にして十分であることを示している。この定理から，ある条件をみたすどの関数微分方程式も，$[0,\infty)$ 上で可積分な摂動に対してのみならず，定数関数を含むある広い範囲の摂動に対しても望ましい挙動をすることがわかる。これらの結果は，常微分方程式における Chow と Yorke の結果の，関数微分方程式へのある種の拡張である。

第二章では，Cones に対する不動点定理を用いて，関数微分方程式の周期解の存在について

の考察がなされている。

近年，工学の多くの分野のみならず，経済学や，また数理生物学においても，関数微分方程式で記述される種々の数学的モデルが研究されている。そのような研究において，関数微分方程式の周期解の存在が，コンピューター実験によって観測されている。そこで，その方程式に周期解が存在するための十分条件を与えるという数学的問題が起こってくる。

第一節においては，最初に自励系の非線形一次元差分微分方程式

(1) $\dot{x}(t)=f(x(t-h)),\ t\geqq 0$

を考える。ここでhは正の定数で，f(x)はある条件をみたす連続関数である。この方程式は，通信系において広く用いられている位相同期系を記述する次の系を一般化したものである。

(2) $\dot{x}(t)=\delta-\sin(x(t-h)),\ \delta\geqq 0.$

主定理は，hとf(x)に対するある条件のもとで，方程式(1)の自明でない周期解が存在することを示している。この定理は，Krasnosel'skii の cone の上で定義されたある完全連続写像に対する不動点定理を用いて証明される。更に方程式(1)に関して，定数解の漸近安定性と自明でない周期解の非存在との間の関係や，第二種の周期解の存在についての考察がなされている。以上の結果は，特殊な方程式(2)においてコンピューター実験により観測されている現象の存在を数学的に保証するものである。

更にこの節においては，自励系の非線形二次元差分微分方程式

(3) $\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+g(x(t-h))=0$

の周期解の存在についての考察もなされている。そこでβ, hは正の定数で, g(x)はある条件をみたす連続関数である。この方程式も，ある位相同期系を記述する次の系を一般化したものである。

(4) $\ddot{x}(t)+\beta\dot{x}(t)+\sin(x(t-h))=\delta,\ \delta\geqq 0.$

方程式(3)の周期解の存在は，方程式(1)に対するのと同様の方法で証明される。主定理は，β, h, g(x)に対するある条件のもとで，方程式(3)が自明でない周期解をもつことを示している。この結果も，特殊な方程式(4)においてコンピューター実験により観測されていることを数学的に保証するものである。

第一節においては，自励系の関数微分方程式の周期解が，Krasnosel'skii の cone の上で定義された写像に対する不動点定理を用いて示された。第二節においては，ある周期的関数微分方程式の周期解の存在について考察する。周期系は固有の周期をもっているので，周期解の存在を論ずるとき，自励系と周期系との間にはその取り扱い方に相違がある。従って，自励系に対して有効な方法が必ずしも周期系に対しても有効とは限らない。事実，前節の方法は周期系に対しては適用できない。与えられた $h>0$ に対して，遅れ時間hをもった単独の周期的非線形関数微分方程式

(5) $\dot{x}(t)=p(t)f(t,x_t)-c(t)x(t)$

を考える。ここで $p(t)$, $c(t)$ は正の定数 ω に対して，連続な ω 周期関数，x_t は $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-h\leqq\theta\leqq 0$ なる $[-h, 0]$ 上の連続関数，$f(t, \phi)$ は t について ω 周期的である。$c(t)$ が定数で $f(t, \phi)=\phi(-h)(1-\phi(0))$ なる特殊な場合には，系(5)は生態系の数学的モデルで，Busenberg と Cooke とによって考察された。方程式(5)の ω 周期解の存在を証明するために，非負連続な ω 周期関数全体からなる cone の上で定義されたある完全連続写像に対する不動点定理が用いられる。そして $p(t)$, $c(t)$, $f(t, \phi)$ に対するある条件のもとで，$c(t)$ がある臨界関数 $c_h(t)$ より小さければ方程式(5)の正の ω 周期解が存在し，$c_h(t)$ 以上であれば存在しないことが示される。この結果は $c(t)$ が定数関数で $f(t, \phi)=\phi(-h)(1-\phi(0))$ の場合の Busenberg と Cooke の結果を含んでいる。

第三章では，Razumikhin 型理論と Schauder の不動点定理を用いて，周期的関数微分方程式の周期解の存在定理が得られている。遅れ時間 r をもった ω 周期系

(6) $\dot{x}(t)=f(t, x_t)$

を考える。ここで $f(t, \phi)$ は R^n 値汎関数である。

第一節では Liapunov 関数を用いて，有限な遅れをもった方程式(6)の ω 周期解の存在が示される。周期的関数微分方程式の周期解の存在を示すためには種々の方法があるが，基本的な考え方の一つは，あるコンパクト凸集合 S をその中に写す，いわゆる Poincaré 写像 T の不動点を見出すことである。Grimmer によって定義された凸 Liapunov 関数を用いて適当なコンパクト凸集合 S が定義でき，Razumikhin の方法によって T が S をその中に写すことが証明できる。主定理として，ある性質をもった Liapunov 関数が存在すれば，有限な遅れをもった方程式(6)が ω 周期解をもつという結果を得た。この定理は Poincaré 写像に Schauder の不動点定理を適用することによって証明される。また，この結果は Volterra 型積分微分方程式に応用できる。

第二節では，周期 ω と比べて大きな遅れ時間 r をもった方程式(6)の ω 周期解の存在定理について考察されている。方程式(6)の極めて特殊な場合には，ω 周期解の存在は ω 以下の遅れをもったある補助方程式に帰着できることが知られている。しかし，そのような帰着は一般の形をした方程式(6)に対しては明らかではなく，多くの定理の中で，付加条件 $r\leqq\omega$ が重要な仮定としておかれている。遅れ時間 ω をもった補助の ω 周期系

(7) $\dot{x}(t)=g(t, x_t)$

を構成して，次の結果が得られた。

定理．方程式(6)の ω 周期解 $x(t)$ は方程式(7)の ω 周期解であり，逆も成り立つ。

この定理は，上に述べた帰着が，一般の ω 周期系に対して常に可能であることを示している。更に，強い凸 Liapunov 関数を定義し，この定理と前節の主定理とを用いて，ある性質をもった Liapunov 関数が存在すれば，無限の遅れをもった方程式(6)が ω 周期解をもつことが証明される。

論文審査の結果の要旨

本論文では，自然科学や社会科学の諸分野における時間遅れの影響をうける現象を記述するのに重要な関数微分方程式の理論の中で極めて重要な課題である解の一意性，安定性および周期解の存在について考察されている。関数微分方程式の研究において用いられる標準的手段は常微分方程式に対して有効な方法の適用を試みることであるが，関数微分方程式に対する相空間が必ずしも局所コンパクトでないことが何らかの新しい方法を見出すことを必要とする。著者は解の一意性に対して常微分方程式におけると同様に，ある種の性質をもったLiapunov汎関数の存在が必要にしてかつ十分であることを示した。積分漸近安定であるためには，ある性質をもったLiapunov汎関数の族が存在することが必要にしてかつ十分であることを示した。その結果を用いると可積分関数のみならず定数関数をも含むある広い範囲の摂動に対しても解は望しい挙動をすることがわかる。

また著者は自励系の関数微分方程式の自明でない周期解の存在定理をえた。これはKrasnosel'skiiのconeの上で定義されたある完全連続写像に対する不動定理を用いて証明される。さらに定数解の漸近安定性と自明でない周期解の非存在との間の関係や，第二種の周期解の存在について考察されている。その結果を適用すると，通信系において広く用いられている位相同期系を記述する方程式において，コンピューター実験によって観測されている諸現象を数学的に実証することができる。またある生態系の数学モデルを含む ω 周期的非線形関数微分方程式の周期解の存在を，非負連続な ω 周期関数全体からなるcone上で不動点定理を用いて導いた。

さらに一般的な有限の遅れ時間をもった周期的関数微分方程式の周期解の存在がLiapunov関数を用いるいわゆるRazumikhin形理論により，Poincaré写像に対するSchauderの不動点定理を適用することによって示された。また周期 ω と比べて大きな遅れ時間をもつ周期系に対しては遅れ時間 ω をもった補助の ω 周期系における存在定理に議論が帰着できることを見出し，有限の遅れをもつ場合の結果が無限の遅れをもった ω 周期系に適用できることを示した。

このように本論文は，この分野における研究に著しく貢献したものであり，理学博士の学位論文として合格であると認める。